Epreuve écrite de mathématiques

Consigne : Vous disposez d'1h30 pour traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.

EXERCICE 1 *(Baccalauréat Amérique du Nord mai 2021)*

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espçce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,6 \\ u_{n+1} &= 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

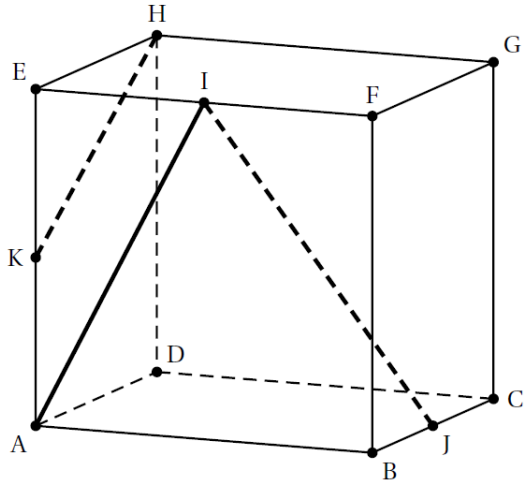
```
def menace()
    u = 0,6
    n = 0
    while u > 0,02
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
    return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 *(Baccalauréat Amérique du Nord mai 2021)*

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE]. On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
2. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$, $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x &= 3+t \\ y &= 8-2t \\ z &= -2+3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= 4+t \\ y &= 1+t \\ z &= 8+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 3 *(Baccalauréat Amérique du Nord mai 2021)*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\text{e}^{a+b}\right)^2 = \text{e}^{2a}+\text{e}^{2b}$.

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2+(3-x)\text{e}^x$ admet pour équation réduite $y=2x+1$.

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\text{e}^{2x}-\text{e}^x+\dfrac{3}{x}\right)=0$.

Affirmation 4 : L'équation $1-x+\text{e}^{-x}=0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$.

Affirmation 5 : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2-5x+\text{e}^x$ est convexe.

EXERCICE 4 *(Baccalauréat S – Nouvelle Calédonie 2020)*

1. On considère l'équation $(E) : z^3 = 4z^2 - 8z + 8$ ayant pour inconnue le nombre complexe z.

a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = (z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right).$$

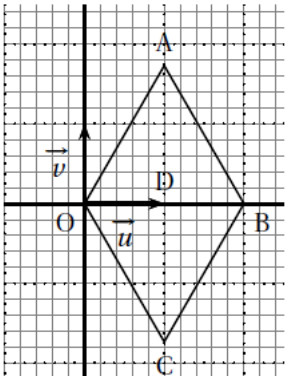
b. Résoudre l'équation (E).

c. Ecrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit A, B, C et D les quatre points d'affixes respectives

$$z_\text{A} = 1 + \text{i}\sqrt{3} \qquad z_\text{B} = 2 \qquad z_\text{C} = 1 - \text{i}\sqrt{3} \qquad z_\text{D} = 1.$$

Ces quatre points sont représentés dans la figure ci-dessous.



2. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ? Justifier.

3. Soit M le point d'affixe $z_\text{M} = \dfrac{7}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

a. Démontrer que les points A, M et B sont alignés.

b. Démontrer que le triangle DMB est rectangle.