# Epreuve écrite de mathématiques

**Consigne :** Vous disposez d'1h30 pour traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.

## EXERCICE 1 *(Baccalauréat Métropole 11 mai 2022)*

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie avec justification. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les six questions sont indépendantes.*

**1.** La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

**a.** $x = -2$ ; **b.** $y = -1$ ;

**c.** $y = -2$ ; **d.** $y = 0$

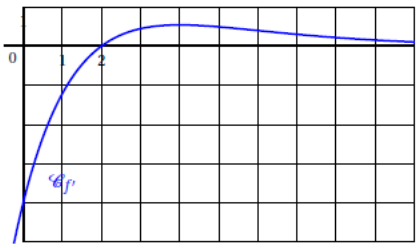
**2.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

La primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

**a.** $F(x) = \dfrac{x^2}{2}e^{x^2}$ ; **b.** $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$

**c.** $F(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$ ; **d.** $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + \dfrac{1}{2}$

**3.** On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}_{f'}$ de **la fonction dérivée $f'$** d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.




On peut affirmer que la fonction $f$ est :

**a.** concave sur $]0\,;+\infty[$ ;

**b.** convexe sur $]0\,;+\infty[$ ;

**c.** convexe sur $[0\,;2]$ ;

**d.** convexe sur $[2\,;+\infty[$.

**4.** Parmi les primitives de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$ :

**a.** toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$ ; **b.** toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$ ;

**c.** certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$ ; **d.** toutes sont croissantes sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissantes sur $[0\,;+\infty[$.

**5.** La limite en $+\infty$ de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :

**a.** $\dfrac{2}{3}$ ; **b.** $+\infty$ ; **c.** $-\infty$ ; **d.** 0.

**6.** L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ :

**a.** trois solutions ; **b.** deux solutions ; **c.** une seule solution ; **d.** aucune solution.

**EXERCICE 2** *(Baccalauréat Centres étrangers Groupe 1 19 mai 2022)*

**Partie A**

On considére la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

**1.** Calculer la limite de $f$ en 0.

**2.** On admet que $f$ est dérivable sur $]0\,;\,1]$. On note $f'$ sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout réel $x$ appartenant à $]0\,;\,1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

**3.** Justifier que, pour tout réel $x$ appartenant à $]0\,;\,1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.

En déduire le tableau de variation de $f$ sur $]0\,;\,1]$.

**4.** Démontrer qu'il existe un unique réel $\ell$ appartenant à $]0\,;\,1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

**Partie B**

**1.** On définit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}$$

**a.** Calculer $a_1$ et $b_1$. On donnera des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

**b.** On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n) :
    c= ...
    b = ...
    a = c
  return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

**2.** On rappelle que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

**a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$

**b.** En déduire que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes.

**3.** On note $A$ la limite de $(a_n)$ et $B$ la limite de $(b_n)$. On admet que $A$ et $B$ appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

**a.** Démontrer que $f(A) = 0$.

**b.** Déterminer $A - B$.

**EXERCICE 3** *(Baccalauréat S Pondichéry 18 avril 2012)*

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $-1$.
Soit $f$ la transformation du plan qui à tout point $M$ d'affixe $z \neq 1$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

**1.** Soit C le point d'affixe $z_{\text{C}} = -2+\text{i}$.

**a.** Calculer l'affixe $z_{\text{C}'}$ du point C$'$ image de C par la transformation $f$, et placer les points C et C$'$ dans le repère donné en annexe.

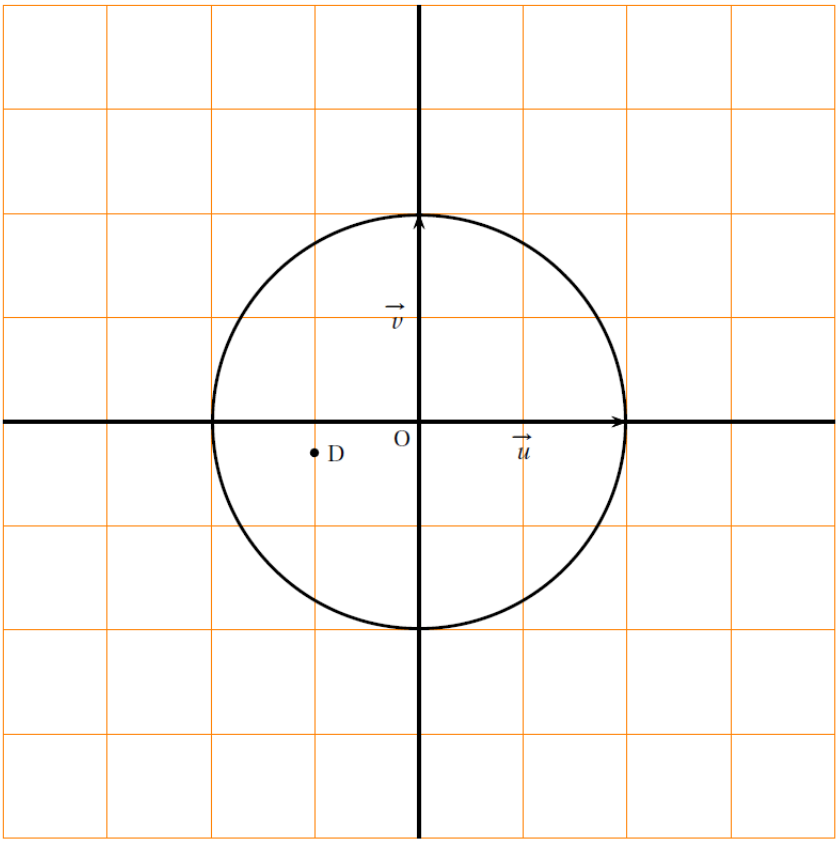
**b.** Montrer que le point C$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

**c.** Montrer que les points A, C et C$'$ sont alignés.

**2.** Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble $\Delta$ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation $f$.

**3.** Montrer que, pour tout point $M$ distinct de A, le point $M'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

**4.** Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.

Que peut-on en déduire pour les points A, $M$ et $M'$ ?

**5.** On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D$'$ par la transformation $f$.