Epreuve écrite de mathématiques

Consigne : Vous disposez d'1h30 pour traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.

EXERCICE 1 *(Baccalauréat Centre étrangers 2022 sujet 2)*

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.
   - **a.** Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   - **b.** Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.
2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.
   - **a.** Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
     Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
   - **b.** Résoudre l'inéquation pour x réel :

     $$-x^2 + 30x - 81 > 0$$

   - **c.** En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.
   - **d.** Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal?
3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).

   Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros?

EXERCICE 2 *(Baccalauréat Asie 17 mai 2022)*

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :
pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.

a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
   return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
D'après le modéle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de $0,5$ mg par heure.
La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\,;\,+\infty[$, par

$$f(t) = 2,5 - 1,5\mathrm{e}^{-0,2t}$$

où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.
On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.

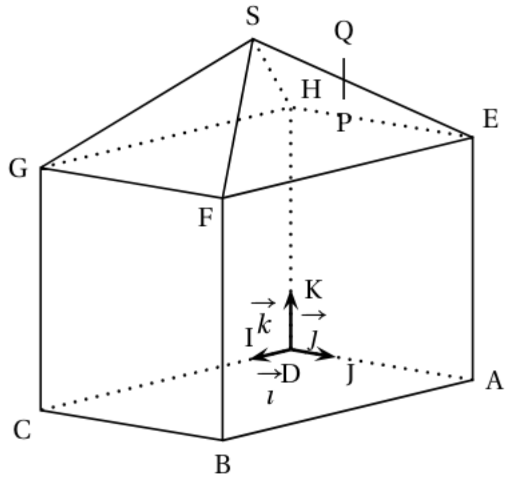
1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?

2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.

3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4. b. du modèle discret de la Partie A.

EXERCICE 3 *(Baccalauréat Nouvelle-Calédonie sujet 2 2022)*

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.
On a DC = 6, DA = DH = 4.
Soit les points I, J et K tels que
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.
On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$.
On se place dans le repére orthonormé $\left(D ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On admet que le point S a pour coordonnées $(3 ; 2 ; 6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.

2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.
On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS) ;
- le point Q a pour coordonnées $(2 ; 3 ; 5{,}5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5{,}5 + t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -4 + 6s \\ y & = & 7 - 4s \\ z & = & 2 + 4s \end{array}\right. \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.

L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?